ЖУРНАЛ
ЄВРОПЕЙСЬКОЇ ЕКОНОМІКИ
Том 7 (№ 4). Грудень 2008
Видання Тернопільського національного економічного університету

Макроекономіка

Юрій ТАДЕЄВ

ДО ПИТАННЯ ПРО ІСНУВАННЯ МАГІСТРАЛЬНОЇ ТРАЄКТОРІЇ НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ МІЖГАЛУЗЕВОГО ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНОГО БАЛАНСУ

Резюме

Запропоноване нелінійне розширення класичної динамічної моделі (π-моделі) на випадок еколого-економічної системи. Показано, що коли нелінійні функції моделі є невід'ємними монотонно зростаючими лінійно-однорідними, то магістральна траєкторія сталого розвитку такої системи існує.

Ключові слова

Еколого-економічна система, міжгалузева еколого-економічна модель, магістральна траєкторія, число Фробеніуса, вектор Фробеніуса, промінь Неймана.

Класифікація за JEL: Q57.

Тадеєв Юрій, канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики, Національний авіаційний університет, Україна.

У роботі [1] запропонована та досліджена на предмет існування невід'ємного розв'язку нелінійна модель міжгалузевого еколого-економічного балансу:

$$\begin{aligned} x^1 &= \Phi_{11}(x^1) + \Phi_{12}(x^2) + y^1, \quad y^1 > 0, \\ x^2 &= \Phi_{21}(x^1) + \Phi_{22}(x^2) - y^1, \quad y^2 > 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

де x^1 – вектор-колонка валового випуску продукції основним виробництвом, y^1 – вектор-колонка випуску кінцевої продукції, x^2 – вектор-колонка обсягів знищених забруднювачів допоміжним виробництвом (очисними спорудами), $\Phi_{11}(x^1)$ – вектор-колонка матеріальних витрат продукції на випуск одиниці продукції (вектор прямих матеріальних витрат основного виробництва), $\Phi_{12}(x^2)$ – вектор-колонка матеріальних витрат продукції при знищенні одиниці забруднювачів очисними спорудами, $\Phi_{21}(x^1)$ – вектор-колонка випуску забруднювачів основним виробництвом, $\Phi_{22}(x^2)$ – вектор-колонка випуску забруднювачів допоміжним виробництвом (знищення забруднювачів).

Достатня умова існування та єдиності невід'ємного розв'язку $x = (x^1, x^2)^T$ має вигляд [1]:

$$\Phi_{21}(y^1) \geq y^2. \qquad (2)$$

У статті [2] побудована та досліджена на предмет існування та єдиності магістрального розвитку лінійна динамічна модель міжгалузевого еколого-економічного балансу, що є розширеною версією класичної π-моделі [3]. У даній роботі розглядається наступне розширення, що полягає в перенесенні динамічної міжгалузевої моделі еколого-економічного балансу на нелінійний випадок.

Пропонуємо таку модель оптимального еколого-економічного розвитку:

$$\begin{aligned} & f_1(x_T^1) + f_2(x_T^2) \to \max, \\ & \Phi_{11}(x_t^1) + \Phi_{12}(x_t^2) + D_{11}(\eta_t^1) + D_{12}(\eta_t^2) + c^1 L_t \leq x_t^1, \\ & \Phi_{12}(x_t^1) + \Phi_{22}(x_t^2) + D_{21}(\eta_t^1) + D_{22}(\eta_t^2) + c^2 L_t \leq x_t^1 + y_t^2, \\ & x_t^1 \leq \xi_{t-1}^1, \; x_t^2 \leq \xi_{t-1}^2, \\ & \xi_t^1 \leq \xi_{t-1}^1 + \eta_t^1, \; \xi_t^2 \leq \xi_{t-1}^2 + \eta_t^2, \\ & l^1(x_t^1) + l^2(x_t^2) \leq L_{t,} \\ & y_t^2 \leq H_1(x_t^1) + H_2(x_t^2), \\ & x_t^1 \geq 0, x_t^2 \geq 0, \xi_t^1 \geq 0, \xi_t^2 \geq 0, \eta_t^1 \geq 0, \eta_t^2 \geq 0, L_t \geq 0, y_t^2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

де $\xi_0^1 > 0$ та $\xi_0^2 > 0$ – задані вектори.

У моделі (3): x_t^1 – вектор повного випуску продукції в період t; x_t^2 – вектор обсягів, утилізованих очисними спорудами забруднювачів; y_t^2 – вектор викидів забруднювачів у навколишнє середовище (незнищені забруднювачі); ξ_t^1 – вектор потужностей з випуску продукції; ξ_t^2 – вектор потужностей з утилізації забруднювачів; η_t^1 – вектор приростів потужностей випускаючих галузей; η_t^2 – вектор приростів потужностей очисних споруд; $\Phi_{11}(x_t^1)$ – вектор матеріальних витрат основного виробництва при випуску продукції обсягом x_t^1; $\Phi_{12}(x_t^2)$ – вектор матеріальних витрат в очисних спорудах при утилізації забруднювачів обсягом x_t^2; $\Phi_{21}(x_t^1)$ – вектор випуску забруднювачів основним виробництвом при випуску продукції обсягом x_t^1; $\Phi_{22}(x_t^2)$ – вектор повторного випуску забруднювачів очисними спорудами при утилізації забруднювачів обсягом x_t^2; $D_{11}(\eta_t^1)$ – вектор матеріальних витрат при створенні додаткових приростів потужностей основного виробництва обсягом η_t^1; $D_{12}(\eta_t^2)$ – вектор матеріальних витрат при створенні додаткових приростів потужностей очисних споруд обсягом η_t^2; $D_{21}(\eta_t^1)$ – вектор випуску забруднювачів при створенні приростів потужностей основного виробництва обсягом η_t^1; $D_{22}(\eta_t^2)$ – вектор випуску забруднювачів при створенні приростів потужностей очисних споруд обсягом η_t^2; $H_1(x_t^1)$ – вектор технологічних викидів забруднювачів у навколишнє середовище основним виробництвом при випуску продукції обсягом x_t^1; $H_2(x_t^2)$ – вектор технологічних викидів забруднювачів у навколишнє середовище очисними спорудами при утилізації забруднювачів обсягом x_t^2; $c^1 > 0$ – вектор натуральної зарплати одного працівника, $c^2 > 0$ – вектор випуску побутових забруднень на одного працівника; $f_1(x_t^1)$ – скалярна функція економічного ефекту від випуску продукції обсягом x_t^1; $f_2(x_t^2)$ – скалярна функція економічного ефекту від утилізації забруднювачів обсягом x_t^2; $l^1(x_t^1)$ – скалярна функція витрат трудових ресурсів при випуску продукції обсягом x_t^1; $l^2(x_t^2)$ – скалярна функція витрат трудових ресурсів при утилізації забруднювачів обсягом x_t^2; L_t – загальна кількість працівників у період t.

Дослідимо стан рівноваги еколого-економічної системи (1). Відповідна стаціонарна траєкторія інтенсивностей функціонування рівноважної системи визначається темпом зростання $\lambda^{-1} > 1$, променем Неймана $X = (x^1, x^2, \xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2, y^2, L)$ і має вигляд

$$x_t^1(t) = \lambda^{-t} x^1,\ x_t^2(t) = \lambda^{-t} x^2,\ \xi_t^1(t) = \lambda^{-t}\xi^1,\ \xi_t^2(t) = \lambda^{-t}\xi^2,$$
$$\eta_t^1(t) = \lambda^{-t}\eta^1,\ \eta_t^2(t) = \lambda^{-t}\eta^2,\ y_t^2(t) = \lambda^{-t} y^2,\ L_t = \lambda^{-t} L. \quad (4)$$

Будемо припускати, що всі невід'ємні монотонно зростаючі скалярні та векторні функції, задіяні в моделі (3), а саме $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $\Phi_{11}(\cdot)$, $\Phi_{12}(\cdot)$, $\Phi_{21}(\cdot)$, $\Phi_{22}(\cdot)$, $D_{11}(\cdot)$, $D_{12}(\cdot)$, $D_{21}(\cdot)$, $D_{22}(\cdot)$, $I^1(\cdot)$, $I^2(\cdot)$, $H_1(\cdot)$, $H_2(\cdot)$ є лінійно-однорідними, тобто:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \text{ при } \lambda > 0 .$$

У цьому випадку, якщо підставити співвідношення (4) в модель (3), то для стану рівноваги $(\lambda, x^1, x^2, \xi^1, \xi^2, \eta^1, \eta^2, y^2, L)$ при великих T одержимо оптимізаційну задачу

$$\begin{aligned}
&\lambda \to \min,\\
&x^1 \ge \Phi_{11}(x^1) + \Phi_{12}(x^2) + D_{11}(\eta^1) + D_{12}(\eta^2) + Lc^1,\\
&x^2 \ge \Phi_{21}(x^1) + \Phi_{22}(x^2) + D_{21}(\eta^1) + D_{22}(\eta^2) + Lc^2 - y^2,\\
&x^1 \le \lambda\xi^1,\ x^2 \le \lambda\xi^2,\ (1-\lambda)\xi^1 \le \eta^1,\ (1-\lambda)\xi^2 \le \eta^2,\\
&I^1(x^1) + I^2(x^2) \le L,\\
&y^2 \le H_1(x^1) + H_2(x^2),\\
&x^1 \ge 0,\ x^2 \ge 0,\ \xi^1 \ge 0,\ \xi^2 \ge 0,\ \eta^1 \ge 0,\ \eta^2 \ge 0,\ L \ge 0,\ y^2 \ge 0.
\end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки при $0 < \lambda < 1$ (саме цей випадок є предметом дослідження) маємо

$$x^1 \le \lambda\xi^1 \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\eta^1,\ x^2 \le \lambda\xi^2 \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\eta^2,$$

а отже

$$\eta^1 \ge \frac{1-\lambda}{\lambda} x^1,\ \eta^2 \ge \frac{1-\lambda}{\lambda} x^2,$$

то, з урахуванням того, що вектор-функції $D_{11}(\cdot)$, $D_{12}(\cdot)$, $D_{21}(\cdot)$, $D_{22}(\cdot)$ є невід'ємними монотонно зростаючими та лінійно-однорідними, одержуємо

$$D_{11}(\eta^1) \ge \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{11}(x^1),\ D_{12}(\eta^2) \ge \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{12}(x^2),$$
$$D_{21}(\eta^1) \ge \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{21}(x^1),\ D_{22}(\eta^2) \ge \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{22}(x^2).$$

Введемо до розгляду такі вектор-функції

$$l^1(x^1)c^1 = R_{11}(x^1),\ l^2(x^2)c^1 = R_{12}(x^2),$$
$$l^1(x^1)c^2 = R_{21}(x^1),\ l^2(x^2)c^2 = R_{22}(x^2), \tag{6}$$

що є невід'ємними монотонно зростаючими та лінійно-однорідними вектор-функціями.

Очевидно, що

$$x^1 \ge \Phi_{11}(x^1) + \Phi_{12}(x^2) + D_{11}(\eta^1) + D_{12}(\eta^2) + Lc^1 \ge$$
$$\ge \Phi_{11}(x^1) + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{11}(x^1) + \Phi_{12}(x^2) + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{12}(x^2) + (l^1(x^1) + l^2(x^2))c^1 \ge$$
$$\ge (\Phi_{11}(x^1) + R_{11}(x^1) + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{11}(x^1)) + (\Phi_{12}(x^2) + R_{12}(x^2) + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{12}(x^2)),$$

$$x^2 \ge \Phi_{21}(x^1) + \Phi_{22}(x^2) + D_{21}(\eta^1) + D_{22}(\eta^2) + Lc^2 - y^2 \ge$$
$$\ge \Phi_{21}(x^1) + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{21}(x^1) + \Phi_{22}(x^2) + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{22}(x^2) + (l^1(x^1) + l^2(x^2))c^2 - y^2 \ge$$
$$\ge (\Phi_{21}(x^1) + R_{21}(x^1) + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{21}(x^1)) + (\Phi_{22}(x^2) + R_{22}(x^2) + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{22}(x^2)) -$$
$$- H_1(x^1) - H_2(x^2).$$

Після множення обох частин одержаних нерівностей на $\lambda > 0$ одержуємо таку векторну нерівність

$$\lambda(\Phi(x) + R(x) - H(x) + (1-\lambda)D(x)) \le \lambda x, \tag{7}$$

де вектор-функції

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x^1) + \Phi_{12}(x^2) \\ \Phi_{21}(x^1) + \Phi_{22}(x^2) \end{pmatrix},\quad R(x) = \begin{pmatrix} R_{11}(x^1) + R_{12}(x^2) \\ R_{21}(x^1) + R_{22}(x^2) \end{pmatrix},$$
$$D(x) = \begin{pmatrix} D_{11}(x^1) + D_{12}(x^2) \\ D_{21}(x^1) + D_{22}(x^2) \end{pmatrix},\quad \mathrm{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_1(x^1) + H_2(x^2) \end{pmatrix}$$

є невід'ємними монотонно зростаючими лінійно-однорідними від векторного аргументу $x = (x^1, x^2)^T$.

Таким чином, задача максимізації темпу зростання збалансованої еколого-економічної системи зводиться до такої нелінійної оптимізаційної моделі:

$$\lambda \to \min,\quad Q(\lambda, x) \le \lambda x, x \ge 0\,, \tag{8}$$

де

$$Q(\lambda, x) = \lambda(\Phi(x) + R(x) - H(x)) + (1-\lambda)D(x). \qquad (9)$$

Розглянемо детально вектор-функцію $\Phi(x) + R(x) - H(x)$, яка є лінійно-однорідною функцією. Оскільки $H(x)$ позначає вектор сумарних технологічних викидів у навколишнє середовище забруднювачів основним виробництвом та очисними спорудами, то, з економічної точки зору, очевидно, що це значно менше від загального випуску забруднювачів основним виробництвом і очисними спорудами та побутового забруднення. Тому вектор-функцію $\Phi(x) + R(x) - H(x)$ можна вважати невід'ємною. Це наше друге припущення стосовно матриць $\Phi(x)$, $R(x)$ та $H(x)$ (нагадаємо, що перше припущення стосувалося лінійної однорідності задіяних скалярних та векторних функцій).

У роботі Р. Солоу та П. Самуельсона [4] вперше розглянута нелінійна задача про власні вектори $\lambda v_i = H_i(v_1, v_2, ..., v_n)(i = 1, 2, ..., n)$, де всі H_i – лінійно-однорідні функції, що монотонно зростають. У роботі М. Моришими [5] доведене таке твердження:

Твердження. *Нехай x – n-вимірний вектор $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $H = (H_1, H_2, ..., H_n)^T$ – також n-вимірний вектор, причому кожна його компонента H_i є неперервною функцією від x. Якщо кожна функція H_i невід'ємна лінійно-однорідна функція від невід'ємного аргументу $x \geq 0$, то нелінійна задача про власні вектори*

$$\lambda v_i = H_i(v), \; i = 1, 2, ..., n$$

має розв'язок при невід'ємних $\lambda, v_1, v_2, ..., v_n$, причому вектор v можна обрати так, щоб

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1.$$

У книзі [6] наведена така лема:

Лема. *Нехай $Q(\lambda) - n \times n$ – матриця, визначена, неперервна на деякому проміжку $[\lambda_1, \lambda_2]$, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Нехай γ_1, γ_2 – фробеніусові числа матриць $Q(\lambda_1), Q(\lambda_2)$ відповідно, причому $\gamma_1 < \lambda_1, \gamma_2 \leq \lambda_2$. Тоді задача*

$$\lambda \to \min, \; Q(\lambda)x \leq \lambda x, \; x \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

має єдиний розв'язок $(\bar{\lambda}, \bar{x})$, причому:

$$Q(\bar{\lambda})\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}\ ;$$

$\bar{\lambda}$ – число Фробеніуса матриці $Q(\bar{\lambda})$;

$\bar{x}$ – вектор Фробеніуса матриці $Q(\bar{\lambda})$;

$$\bar{x} > 0,\ \lambda_1 \le \bar{\lambda} \le \lambda_2 .$$

Використовуючи міркування, що лежать в основі доведення твердження та леми, проведемо їх стосовно нелінійної оптимізаційної задачі (8)-(9). Насамперед виберемо $\lambda_1 = 0$ та $\lambda_2 = 1$. Маємо $Q(0, x) = D(x)$, $Q(1, x) = \Phi(x) + R(x) - H(x)$. Відповідні їм фробеніусові числа $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 < 1$. Для вектор-функції $Q(\lambda, x) = \lambda(\Phi(x) + R(x) - H(x)) + (1 - \lambda)D(x)$ виконуються всі умови леми, якщо при цьому припускати (це вже третє припущення про $\Phi(x), R(x), H(x), D(x)$, що вектор-функція $Q(\lambda, x)$ продуктивна при всіх $0 \le \lambda \le 1$. Продуктивність математично означає, що її фробеніусове число строго менше одиниці.

Таким чином, можна стверджувати, що нелінійна оптимізаційна задача (8)–(9) має єдиний розв'язок $\bar{\lambda} < 1, \bar{x} \ge 0$.

Перейдемо тепер до знаходження стану рівноваги еколого-економічної системи (3).

Нехай (x, ξ, η, y^2, L) – довільний ненульовий вектор, який задовольняє систему нерівностей у (5), є розв'язком цієї системи при $\lambda = \bar{\lambda}$. Можна показати, що з умов $0 < \bar{\lambda} < 1$ та $(x, \xi, \eta, y^2, L) \ne 0$ випливає, що $x \ne 0$. Із системи в (5) маємо нерівності

$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} x \le (1-\bar{\lambda})\xi \le \eta , \tag{10}$$

звідки, з урахуванням $D(\eta) \ge 0$, одержуємо

$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D(x) \le D(\eta). \tag{11}$$

Оскільки $R(x) = I(x)c$, то з (5), (11) маємо

$$\Phi(x) + R(x) - H(x) + \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D(x) \le x. \tag{12}$$

Оскільки $\bar{\lambda}$ – число Фробеніуса, то очевидно, що (12) може справджуватись лише в тому випадку, коли x – вектор Фробеніуса. Це означає, що в (12) нерівності перетворюються в рівності. Звідси, зокрема, одержуємо

$$R_{11}(x^1)+\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}D_{11}(x^1)+R_{12}(x^2)+\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}D_{12}(x^2)=Lc^1+D_{11}(\eta^1)+D_{12}(\eta^2),$$

$$R_{21}(x^1)-H_1(x^1)+\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}D_{21}(x^1)+R_{22}(x^2)-H_2(x^2)+\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}D_{22}(x^2)=$$
$$=Lc^2+D_{21}(\eta^1)+D_{22}(\eta^2)-y^2.$$

Оскільки

$$R_{11}(x^1)+R_{12}(x^2)=l(x)c^1\le Lc^1,\ R_{21}(x^1)+R_{22}(x^2)=l(x)c^2\le Lc^2,$$
$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}(D_{11}(x^1)+D_{12}(x^2))\le D_{11}(\eta^1)+D_{12}(\eta^2),$$
$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}(D_{21}(x^1)+D_{22}(x^2))\le D_{21}(\eta^1)+D_{22}(\eta^2),$$
$$H_1(x^1)+H_2(x^2)\ge y^2,$$

то тут нерівності справедливі лише в тому випадку, коли

$$l(x)=L,\ \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}D(x)=D(\eta),\ H_1(x^1)+H_2(x^2)=y^2.$$

Оскільки

$$\eta-\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}x\ge 0,\ D(\eta-\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}x)=0,$$

то з умов, накладених на вектор-функцію $D(x)$, випливає, що

$$\eta=\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}x. \qquad (13)$$

У такому випадку маємо також

$$\xi=\bar{\lambda}^{-1}x. \qquad (14)$$

Тим самим показана єдиність променя Неймана для нелінійної моделі (3), що відповідає темпу зростання $\bar{\lambda}^{-1}$.

Таким чином, у роботі встановлена магістральна траєкторія сталого розвитку для нелінійної розширеної π-моделі, коли нелінійні функції моделі є невід'ємними монотонно зростаючими та лінійно-однорідними. При цьому було доведено існування кореня Фробеніуса для нелінійної задачі як за власним числом, так і за власним вектором.

Література

1. Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К.: Вища школа, 1999. – 236 с.
2. Ляшенко І. М., Тадеєв Ю. П. Оптимальна траєкторія міжгалузевої моделі еколого-економічного розвитку // Журнал європейської економіки, видання Тернопільської академії народного господарства. – 2005. – № 1. – Т. 4. – С. 21–30.
3. Иванилов Ю. П., Петров А. А. Динамическая модель расширения и перестройки производства (π-модель) // Кибернетику – на службу коммунизму. – Т. 6. – М.: Энергия, 1971. – С. 23.
4. Solow R. M. and Samuelson P. A. Balanced Growth under Constant Returns to Scale, Econometrica XXI (July 1953). – С. 412–424.
5. Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост (Многоотраслевой анализ). – М.: Наука, 1972. – 280 с.
6. Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка: Навч. посіб. / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К.: Вища школа, 2004. – 207 с.

Стаття надійшла до редакції 17 листопада 2008 р.