ЖУРНАЛ
ЄВРОПЕЙСЬКОЇ ЕКОНОМІКИ
Том 4 (№ 1). Березень 2005
Видання Тернопільської академії народного господарства

Ігор ЛЯШЕНКО,
Юрій ТАДЕЄВ

ОПТИМАЛЬНА ТРАЄКТОРІЯ МІЖГАЛУЗЕВОЇ МОДЕЛІ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ

Резюме

Розглянуто питання розширення класичної динамічної міжгалузевої моделі на випадок еколого-економічної системи. Для запропонованої динамічної міжгалузевої еколого-економічної моделі побудовано магістральну траєкторію збалансованого розвитку Неймана.

Ключові слова

Еколого-економічна система, міжгалузева еколого-економічна модель, динамічна рівновага, магістральна траєкторія, максимальний темп економічного зростання, промінь Неймана.

Ляшенко Ігор, докт. фіз.-мат. наук, професор, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Україна.
Тадеєв Юрій, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Україна.

Міжгалузеву еколого-економічну модель, як узагальнення класичної моделі міжгалузевого балансу вперше запропонували В. Леонтьєв та Д. Форд [1]:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1 \\ x_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2 \end{aligned}, \qquad (1)$$

де x_1 – вектор випуску продукції, x_2 – вектор знищених забруднювачів, y_1 – вектор кінцевої продукції, y_2 – вектор викидів забруднювачів у навколишнє середовище, A_{11} та A_{12} – матриці матеріальних затрат, A_{21} та A_{22} – матриці випуску забруднювачів.

Відповідна багатогалузева модель еколого-економічного розвитку пов'язана з великою розмірністю оптимізаційної задачі, що є перешкодою для практичного використання. Подібні задачі можуть бути успішно розв'язані за допомогою якісних методів дослідження оптимальних траєкторій.

В теорії економіки, що зростає, Дорфман, Самуельсон та Солоу [2] показали, що ефективна траєкторія економічного росту має довгострокову тенденцію наближатися до нейманівського шляху стійкого збалансованого зростання (магістралі).

Основні поняття та висновки магістральної теорії продемонструємо на прикладі оптимізаційної задачі для моделі Неймана [3, 4]:

$$\begin{aligned} &C_T x_T \to \max \\ &Ax_t \le Bx_{t-1}, \quad t = 1,2,\dots,T, \end{aligned} \qquad (2)$$

де A та B – невід'ємні прямокутні матриці витрат та випуску відповідно, C_T – заданий додатній вектор, x_T – вектор інтенсивностей технологічних процесів за період часу t.

Стаціонарна збалансована траєкторія для моделі (2) визначається темпом зростання $\bar{\lambda}^{-1}$ та променем Неймана $\bar{x}$ і має вигляд $x_t = \bar{\lambda}^{-t}\bar{x}$, де $\bar{\lambda} > 0$, $\bar{x} > 0$ – єдине розв'язання системи нерівностей

$$A\bar{x} \le \bar{\lambda} B\bar{x}. \qquad (3)$$

Виявляється, що магістраль $\bar{x}$ малочутлива до зміни коефіцієнтів цільового функціонала C_T і задача (2) зводиться до такої задачі Неймана

$$\lambda \to \min, \quad Ax \le \lambda Bx, \quad x \ge 0. \qquad (4)$$

Основний результат відносно моделі Неймана (4) полягає в такому твердженні [3, 4]:

Твердження 1. *Нехай невід'ємні матриці* A, B *– такі, що матриця випуску* B *не має нульових рядків, а матриця витрат* A *не має нульових стовпчиків. Тоді нерозкладна продуктивна модель Неймана* (4) *має єдиний темп зростання* $\overline{\lambda} < 1$ *і магістраль* $\overline{x} > 0$.

Тут нерозкладність моделі означає, що число Фробеніуса моделі просте, а вектор Фробеніуса суворо додатний. Продуктивність моделі означає, що число Фробеніуса менше 1.

Однією з найвідоміших схем динамічного міжгалузевого балансу є так звана π-модель, розроблена Ю. П. Іваніловим та О. О. Петровим [5]:

$$\begin{gathered} Ax_t + D\eta_t + L_t c \le x_t, \\ x_t \le \xi_{t-1}, \quad \xi_t \le \xi_{t-1} + \eta_t, \\ lx_t \le L_t, \\ (x_t, \xi_t, \eta_t, L_t) \ge 0, \quad t = 1,2,\dots,T, \end{gathered} \tag{5}$$

де ξ_t – вектор потужностей з випуску продукції, η_t – вектор приросту потужностей, D – невід'ємна матриця матеріальних витрат, l – вектор трудомісткості випуску продукції, L_t – загальна кількість робітників, c – вектор подушного споживання (натуральна зарплата робітника).

До моделі (5) додаються різні критерії оптимального функціонування економіки, зокрема термінальний критерій

$$c_T x_T \to \max, \tag{6}$$

де $c_T > 0$, що пов'язано з максимальним темпом зростання економіки.

Основні результати відносно існування магістралі для задачі (5)–(6) формулюються у вигляді такого твердження [3]:

Твердження 2. *Нехай* $\xi_0 > 0$, *матриця* $R = (c_i l_j)_1^n$, *матриця* $A + R$ *нерозкладна і продуктивна, матриця* $Q(\lambda) = \lambda(A + R) + (1 - \lambda)D$ *примітивна. Тоді вектор* $(\overline{x}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{L})$, *де* $\lambda = \overline{\lambda} < 1$ *та* $\overline{x} > 0$, *відповідно, – число Фробеніуса та вектор Фробеніуса матриці* $Q(\lambda)$, *є магістраллю для моделі* (5)–(6).

Невирішеним на сьогодні є питання розширення π-моделі (4) на випадок еколого-економічної системи та встановлення магістралі розвитку такої еколого-економічної системи. Цьому і присвячено дану статтю.

Пропонується така модель:

$$
\begin{gathered}
c_1^T x_1(T) + c_2^T x_2(T) \to \max, \\
A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + D_{11}\eta_1(t) + D_{12}\eta_2(t) + c_1 L(t) \le x_1(t), \\
A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + D_{21}\eta_1(t) + D_{22}\eta_2(t) + c_2 L(t) \le x_2(t) + y_2(t), \\
x_1(t) \le \xi_1(t-1), \quad x_2(t) \le \xi_2(t-1), \\
\xi_1(t) \le \xi_1(t-1) + \eta_1(t), \quad \xi_2(t) \le \xi_2(t-1) + \eta_2(t), \\
l_1 x_1(t) + l_2 x_2(t) \le L(t), \\
y_2(t) \le H_1 x_1(t) + H_2 x_2(t), \\
x_1(t) \ge 0, \quad x_2(t) \ge 0, \quad \xi_1(t) \ge 0, \quad \xi_2(t) \ge 0, \quad \eta_1(t) \ge 0, \quad \eta_2(t) \ge 0, \\
L(t) \ge 0, \quad y_2(t) \ge 0, \quad t = 1,2,\ldots,T,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

$\xi_1(0) > 0, \quad \xi_2(0) > 0$ – задані.

Тут, на додаток до моделі (1), $\xi_1(t)$ – вектор потужності з випуску продукції, $\xi_2(t)$ – вектор потужності зі знищення забруднювачів, $\eta_1(t)$ – вектор приростів потужностей випускаючих галузей, $\eta_2(t)$ – вектор приростів потужностей очисних споруд, D_{11}, D_{12} – невід'ємні матриці матеріальних витрат, D_{21}, D_{22} – невід'ємні матриці випуску забруднювачів при будівництві основного виробництва та очисних споруд, $c_1 > 0$ – вектор натуральної зарплати одного виробника, $c_2 > 0$ – вектор випуску побутових забруднень на одного виробника, $l_1 > 0$ – вектор трудомісткості випуску продукції, $l_2 > 0$ – вектор трудомісткості знищення забруднювачів, $L(t)$ – загальна кількість робітників, H_1, H_2 – невід'ємні матриці технологічних викидів забруднювачів у навколишнє середовище основним виробництвом та очисними спорудами.

Дослідимо стан рівноваги системи (7). Відповідна стаціонарна траєкторія інтенсивностей визначається темпом зростання $\lambda^{-1} > 1$ та променем Неймана $X = (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, y_2, L)$ і має вигляд

$$
\begin{gathered}
x_1(t) = \lambda^{-t}x_1, \quad x_2(t) = \lambda^{-t}x_2, \quad \xi_1(t) = \lambda^{-t}\xi_1, \quad \xi_2(t) = \lambda^{-t}\xi_2, \\
\eta_1(t) = \lambda^{-t}\eta_1, \quad \eta_2(t) = \lambda^{-t}\eta_2, \quad y_2(t) = \lambda^{-t}y_2, \quad L(t) = \lambda^{-t}L.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Якщо співвідношення (8) підставити в (7), то для стану рівноваги $(\lambda, x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, y_2, L)$ при великих T отримаємо оптимізаційну задачу

$$
\begin{gathered}
\lambda \to \min, \\
x_1 \ge A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + D_{11}\eta_1 + D_{12}\eta_2 + Lc_1, \\
x_2 \ge A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + D_{21}\eta_1 + D_{22}\eta_2 + Lc_2 - y_2, \\
x_1 \le \lambda\xi_1, \quad x_2 \le \lambda\xi_2, \quad (1-\lambda)\xi_1 \le \eta_1, \quad (1-\lambda)\xi_2 \le \eta_2, \\
l_1x_1 + l_2x_2 \le L, \\
y_2 \le H_1x_1 + H_2x_2, \\
x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \xi_1 \ge 0, \quad \xi_2 \ge 0, \quad \eta_1 \ge 0, \quad \eta_2 \ge 0, \quad L \ge 0, \quad y_2 \ge 0.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Введемо до розгляду матриці

$$
R_{11} = \left(c_i^1 l_j^1\right), \quad R_{12} = \left(c_i^1 l_j^2\right), \quad R_{21} = \left(c_i^2 l_j^1\right), \quad R_{22} = \left(c_i^2 l_j^2\right).
$$

Оскільки при $0 < \lambda < 1$ маємо

$$
x_1 \le \lambda\xi_1 \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\eta_1, \quad x_2 \le \lambda\xi_2 \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\eta_2,
$$

а отже

$$
\eta_1 \ge \frac{\lambda}{1-\lambda}x_1, \quad \eta_2 \ge \frac{\lambda}{1-\lambda}x_2,
$$

то з урахуванням, що $D_{11} \ge 0, \quad D_{12} \ge 0, \quad D_{21} \ge 0, \quad D_{22} \ge 0,$ одержуємо

$$
\begin{gathered}
D_{11}\eta_1 \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{11}x_1, \quad D_{12}\eta_2 \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{12}x_2, \\
D_{21}\eta_1 \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{21}x_1, \quad D_{22}\eta_2 \ge \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{22}x_2.
\end{gathered}
$$

Оскільки

$$
\begin{gathered}
(l_1x_1)c_1 = R_{11}x_1, \quad (l_2x_2)c_1 = R_{12}x_2, \\
(l_1x_1)c_2 = R_{21}x_1, \quad (l_2x_2)c_2 = R_{22}x_2,
\end{gathered}
$$

то, враховуючи невід'ємність матриць H_1 та H_2, приходимо до таких нерівностей

$$
\begin{aligned}
& x_1 \ge A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + D_{11}\eta_1 + D_{12}\eta_2 + Lc_1 \ge \left(A_{11} + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{11}\right)x_1 + \left(A_{12} + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{12}\right)x_2 + \\
& + (l_1x_1 + l_2x_2)c_1 \ge \left(A_{11} + R_{11} + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{11}\right)x_1 + \left(A_{12} + R_{12} + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{12}\right)x_2, \\
& x_2 \ge A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + D_{21}\eta_1 + D_{22}\eta_2 + Lc_2 - y_2 \ge \\
& \ge \left(A_{21} + R_{21} + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{21}\right)x_1 + \left(A_{22} + R_{22} + \frac{1-\lambda}{\lambda}D_{22}\right)x_2 - H_1x_1 - H_2x_2.
\end{aligned}
$$

Останнє можна також записати у вигляді

$$x_2 + H_1 x_1 + H_2 x_2 \geq \left(A_{21} + R_{21} + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{21} \right) x_1 + \left(A_{22} + R_{22} + \frac{1-\lambda}{\lambda} D_{22} \right) x_2.$$

Після множення обох частин одержаних нерівностей на $\lambda > 0$ одержуємо

$$\lambda(E+H)X \geq [\lambda(A+R) + (1-\lambda)D]X, \qquad (10)$$

де $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_1 & H_2 \end{pmatrix}$ – невід'ємні квадратні матриці, E – одинична матриця, $X = (X_1, X_2)^T$ – вектор-стовпчик.

Таким чином, задача максимізації темпу зростання зводиться до такої узагальненої моделі Неймана

$$\lambda \to \min, \quad Q(\lambda)x \leq \lambda Bx, \quad x \geq 0, \qquad (11)$$

де

$$Q(\lambda) = \lambda(A+R) + (1-\lambda)D, \quad B = E + H. \qquad (12)$$

Побудуємо для (11) двоїсту задачу

$$pQ(\lambda) \geq \lambda pB, \quad p \geq 0, \qquad (13)$$

де $p = (p_1, p_2)$ – вектор-рядок двоїстих оцінок. Оскільки нас цікавить випадок $x > 0$, то це можливо лише тоді, коли

$$pQ(\lambda) = \lambda pB. \qquad (14)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (14) має нетривіальний розв'язок $p \neq 0$ лише за умови

$$\det(Q(\lambda) - \lambda B) = 0, \qquad (15)$$

тобто

$$\det[(1-\lambda)D - \lambda(E - A - R + H)] = 0. \qquad (16)$$

Нехай матриця $A + R$ є продуктивною, тоді [3, 4] існує $(E - A - R)^{-1} \geq 0$.

Нехай також матриця H настільки мала, що $H \leq A + R$ (це, як правило, виконується, оскільки $A \geq 0$, $R > 0$). Тоді матриця $\overline{A} = A + R - H \geq 0$ залишається продуктивною, тобто існує $(E - \overline{A})^{-1} = (E - A - R + H)^{-1} \geq 0$.

Рівняння (16) можна переписати у вигляді

$$\det\left|(E - A - R + H)^{-1} D - \mu E\right| = 0, \qquad (17)$$

де $\mu = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} - 1 > 0$ при $0 < \lambda < 1$. Найменшому значенню λ відповідає найбільше значення μ.

Матриця $(E - A - R + H)^{-1} \geq 0$. Тоді, згідно з теоремою Перрона–Фробеніуса [4], існує число Фробеніуса $\overline{\mu} > 0$ і відповідний вектор Фробеніуса $\overline{z} \geq 0$ такий, що

$$(E - A - R + H)^{-1} D\overline{z} = \mu\overline{z}. \tag{18}$$

Зазначимо при цьому, що

$$(E - A - R + H)^{-1} D \leq (E - A - R)^{-1} D,$$

і тому $\overline{\mu} \leq \mu^*$, де μ^* – число Фробеніуса матриці $(E - A - R)^{-1} D$.

Повернемося тепер до задачі (11), яку перепишемо у вигляді

$$\mu \to \min, \quad (E - A - R + H)^{-1} x \leq \mu x, \quad x \geq 0. \tag{19}$$

Розв'язок цієї задачі досягається при $\mu = \overline{\mu}$, $x = \overline{z}$. При цьому темп росту $\overline{\lambda}^{-1} = 1 + \frac{1}{\overline{\mu}} \geq 1 + \frac{1}{\mu^*} > 1$, а також структура випуску $\overline{x} \geq 0$.

Перейдемо тепер до віднайдення стану рівноваги еколого-економічної моделі (7). Рівноважна траєкторія інтенсивностей визначається темпом росту $\overline{\lambda}^{-1}$ та променем Неймана $X = (x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, y_2, L)$. Для того, щоб забезпечити існування нетривіального розв'язку системи нерівностей (9), необхідно накласти деякі умови на параметри моделі.

Будемо вважати, що матриця A невід'ємна і нерозкладна, $l > 0$, $c > 0$, а матриця $A + R$ продуктивна, тобто її число Фробеніуса менше за 1. Змістовно це обмеження полягає в тому, що існуюча технологія (A, l) дає змогу кожному працівнику «прогодувати» себе, здійснюючи виробничий процес (виробляючи продукцію та позбавляючись від забруднень).

Крім того, будемо вважати, що $D \geq 0$ і, якщо $\eta \geq 0$, $D\eta = 0$, то $\eta = 0$. Таке припущення означає, що будь-яке збільшення потужностей виробництва і очисних споруд вимагає матеріальних затрат. Іншими словами, ми вважаємо, що у матриці D немає нульових стовпчиків.

Основний результат даної статті формулюється у вигляді такого твердження.

Твердження 3. *Якщо матриця $A + R$ продуктивна, матриця $H \leq A + R$, а матриця D не має нульових стовпчиків, то в моделі* (7) *існує* *стан рівноваги з темпом росту* $\bar{\lambda}^{-1} = 1 + \frac{1}{\bar{\mu}}$, *якому відповідає єдиний промінь Неймана* $(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, y_2, L)$, *причому*

1) $\bar{\mu}$ – *число Фробеніуса,* $\bar{x}$ – *вектор Фробеніуса матриці* $(E - A - R + H)^{-1} D$;

2) $$\bar{\xi} = \bar{\lambda}^{-1}\bar{x}, \quad \bar{\eta} = \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\bar{x}, \quad \bar{y}_2 = H_1\bar{x}_1 + H_2\bar{x}_2, \quad \bar{L} = l\bar{x}. \qquad (20)$$

Доведення. Розглянемо задачу

$$\begin{gathered} \lambda \to \min, \\ (\lambda(A + R - H) + (1-\lambda)D)x \le \lambda x, \quad ex = 1, \quad x \ge 0, \end{gathered} \qquad (21)$$

де $e = (1,1,...,1)$.

За припущенням, число Фробеніуса для матриці $A + R$ обов'язково менше 1. Оскільки $H \le A + R$, то число Фробеніуса для матриці $A + R - H$ також менше 1. Разом із тим, на матрицю D впливає те, що число Фробеніуса для матриці D більше 0. Задача (21) має розв'язок $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, де $0 < \bar{\lambda} < 1$. Покажемо, що число $\bar{\lambda}^{-1}$ є темпом росту для моделі (7), якому відповідає промінь Неймана. Справді, очевидно, що вектор $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{y}_2, \bar{L})$, який визначається рівностями (20), є розв'язком системи нерівностей (9).

Нехай тепер (x, ξ, η, y_2, L) – довільний ненульовий вектор, що задовольняє систему нерівностей (9), – є розв'язком цієї системи при $\lambda = \bar{\lambda}$. Можна показати, що з умов $0 < \bar{\lambda} < 1$ та $(x, \xi, \eta, y_2, L) \ne 0$ випливає, що $x \ne 0$. З системи (9) маємо нерівності

$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} x \le (1-\bar{\lambda})\xi \le \eta, \qquad (22)$$

звідки, з урахуванням $D \ge 0$, одержуємо

$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D x \le D\eta. \qquad (23)$$

Оскільки $Rx = lxc$, то з (9) та (23) маємо

$$\left(A + R - H + \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} D\right) x \le x \qquad (24)$$

або

$$(E-A-R+H)^{-1}Dx \geq \bar{\mu}x. \qquad (25)$$

Оскільки $\bar{\mu}$ – число Фробеніуса для матриці $(E-A-R+H)^{-1}D$, то ясно, що (25) може справджуватися лише в тому випадку, коли x – вектор Фробеніуса. Це означає, що в (25) і в (23) нерівності перетворюються у рівності. Звідси, зокрема, одержуємо

$$\left(R_{11}+\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}D_{11}\right)x_1+\left(R_{12}+\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}D_{12}\right)x_2 = Lc_1+D_{11}\eta_1+D_{12}\eta_2,$$

$$\left(R_{21}-H_1+\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}D_{21}\right)x_1+\left(R_{22}-H_2+\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}D_{22}\right)x_2 = Lc_2+D_{21}\eta_1+D_{22}\eta_2-y_2.$$

Оскільки

$$R_{11}x_1+R_{12}x_2 = lxc_1 \leq Lc_1, \quad R_{21}x_1+R_{22}x_2 = lxc_2 \leq Lc_2,$$

$$\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}(D_{11}x_1+D_{12}x_2) \leq D_{11}\eta_1+D_{12}\eta_2, \quad \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}(D_{21}x_1+D_{22}x_2) \leq D_{21}\eta_1+D_{22}\eta_2,$$

$$H_1x_1+H_2x_2 \geq y_2,$$

то тут нерівності справедливі лише в тому випадку, коли

$$lx = L, \quad \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}Dx = D\eta, \quad H_1x_1+H_2x_2 = y_2.$$

Оскільки

$$\eta-\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}x \geq 0, \quad D\left(\eta-\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}x\right) = 0,$$

то за цих умов на матрицю D отримуємо

$$\eta = \frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}x.$$

У такому випадку маємо $\xi = \bar{\lambda}^{-1}x$. Тим самим доведено єдність променя Неймана для моделі (7), що відповідає темпу зростання $\bar{\lambda}^{-1} > 1$. Отже, твердження доведене.

У подальшому планується провести конкретні числові розрахунки на реальних даних екології та економіки України.

Література

1. Леонтьев В. В., Форд Д. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду // Экономика и математические методы. – Т. VIII. – Вып. 3. – 1972. – С. 370–400.
2. Dorfman R., Samuelson P. A., Solow R. M. Linear Programming and Economic Analysis, New York: Mc Graw – Hill, 1958.
3. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 296 с.
4. Пономаренко О. І., Перестюк М. О., Бурим В. М. Основи математичної економіки. – К.: Інформатика. – 1995. – 320 с.
5. Иванилов Ю. П., Петров А. А. Динамическая модель расширения и перестройки производства (π-модель) // Кибернетику – на службу коммунизму. – Т. 6. – М.: Энергия, 1971. – С. 23.

Стаття надійшла до редакції 30 грудня 2004 р.